POSITIONS RELATIVES DES COURBES DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Propriété :
Soit x un nombre réel.
- Si $\mathbf{0 \leq x \leq 1}$ alors $\mathbf{0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1}$.
- Si $\mathbf{x \geq 1}$ alors $\mathbf{1 \leq x \leq x^2 \leq x^3}$.

Démonstration :

Premier cas : $0 \leq x \leq 1$
$0 \leq x \leq 1$
En multipliant les trois membres de l'inégalité par x qui est positif, on obtient :
$0 \leq x^2 \leq x$
En multipliant les trois membres de cette deuxième inégalité par x qui est positif, on obtient :
$0 \leq x^3 \leq x^2$

D'après les trois inégalités précédentes : $0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$

Ainsi si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$.

Deuxième cas : $x \geq 1$
$x \geq 1$
En multipliant les deux membres de l'inégalité par x qui est positif, on obtient :
$x^2 \geq x$
En multipliant, les trois membres de cette deuxième inégalité par x qui est positif, on obtient :
$x^3 \geq x^2$

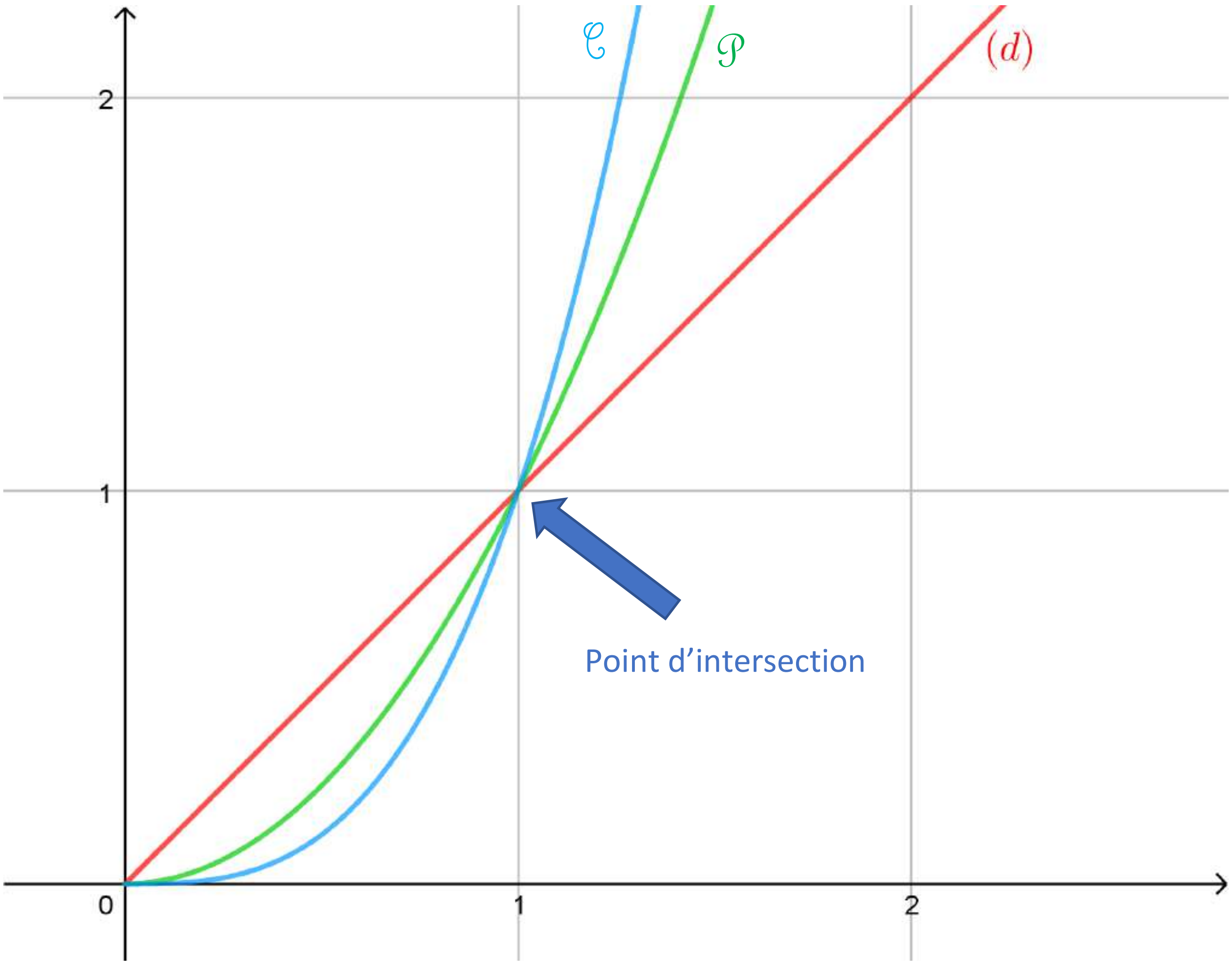
D'après les trois inégalités précédentes : $1 \leq x \leq x^2 \leq x^3$

Ainsi si $x \geq 1$ alors $1 \leq x \leq x^2 \leq x^3$.

La propriété est démontrée.

Remarques :
Soit (d) la droite représentant la fonction $x \mapsto x$.
Soit $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction carré.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant la fonction cube.

- Sur l'intervalle $[0\,;1]$, la courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de la parabole $\mathcal{P}$ qui elle-même est en-dessous de la droite (d).
- Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la droite (d) est en-dessous de la parabole $\mathcal{P}$ qui elle-même est en-dessous de la courbe $\mathcal{C}$.
- Le point de coordonnées $(1\,;1)$ appartient aux trois courbes.



$\mathscr{C}$
$\mathscr{P}$
(d)
2
1
0
1
2
Point d'intersection