VARIATIONS D'UNE FONCTION AFFINE ET TAUX D'ACCROISSEMENT

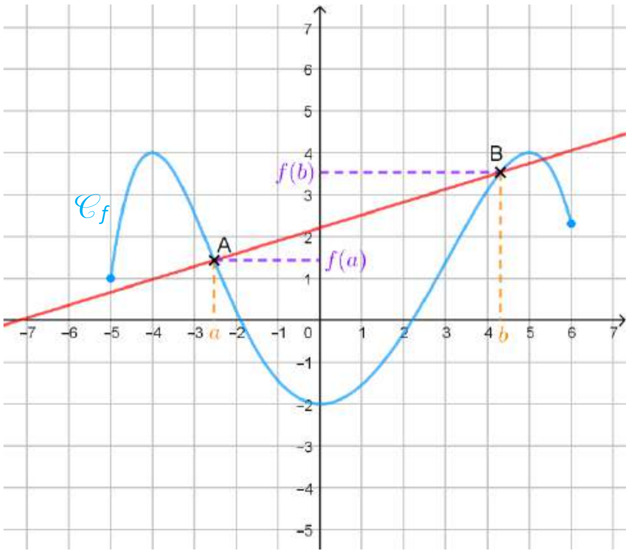
Définition :
Soit f une fonction définie sur intervalle I et soient a et b deux réels de l'intervalle I tels que $a < b$.
On appelle **taux d'accroissement de f entre a et b** le nombre τ défini par :

$$\boldsymbol{\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Remarque :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Interprétation :
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de l'intervalle I tels que $a < b$.
Soient $A\big(a\,;f(a)\big)$ et $B(b\,;f(b))$ (les points A et B appartiennent à la courbe représentative de f).
Le taux d'accroissement de f entre a et b représente le coefficient directeur de la droite (AB).



Propriété 1 :
Soient m et p deux réels et f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = mx + p}$.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Le **taux d'accroissement de f entre a et b** est **égal à m**, le coefficient directeur de la droite représentative de f.

Démonstration :
Soient m et p deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(mb + p) - (ma + p)}{b - a} = \frac{mb + p - ma - p}{b - a} = \frac{mb - ma}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$$

On peut simplifier par $b - a$ qui est différent de 0

Ainsi le taux d'accroissement de f entre a et b est bien égal à m.

Propriété 2 :
Soient m et p deux réels et f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = mx + p}$.
La fonction f est :

- **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$ **si** $\boldsymbol{m < 0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

- **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ **si** $\boldsymbol{m > 0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

- **constante** sur $\mathbb{R}$ **si** $\boldsymbol{m = 0}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	→	

Exemples :
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-5 < 0$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $5 > 0$.
- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2$ est constante sur $\mathbb{R}$.