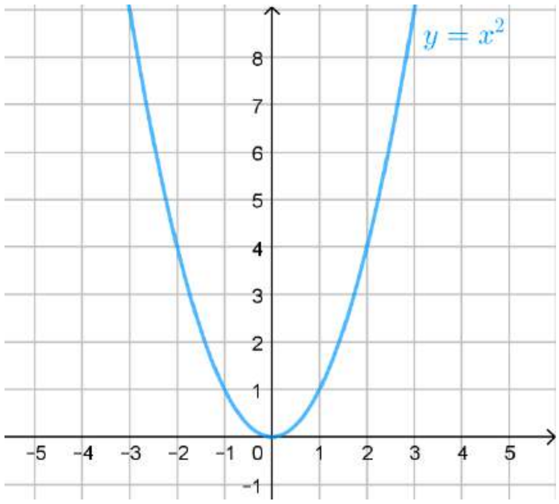
VARIATIONS DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Propriété 1 :
La **fonction carré** définie sur $\mathbb{R}$ est :

- **strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$**
- **strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Démonstration :
Montrons que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$:
Soient a et b deux réels de $]-\infty\,;0]$ tels que $a < b$.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Or $a - b < 0$ car $a < b$
De plus, $a + b \leq 0$ car a et b appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;0]$.
Mais $a < b$ donc a et b ne peuvent pas être tous les deux nuls.
Ainsi $a + b < 0$

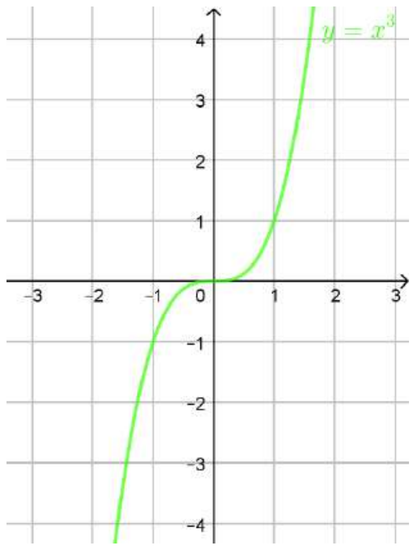
D'après la règle du signe d'un produit, $(a-b)(a+b) > 0$ soit $a^2 - b^2 > 0$.
On en déduit que $a^2 > b^2$.

On a donc montré que pour tous réels a et b de l'intervalle $]-\infty\,;0]$ tels que $a < b$, on a $a^2 > b^2$.
La fonction carré est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

On montre de la même manière que la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Propriété 2 :
La **fonction cube** définie sur $\mathbb{R}$ est
strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

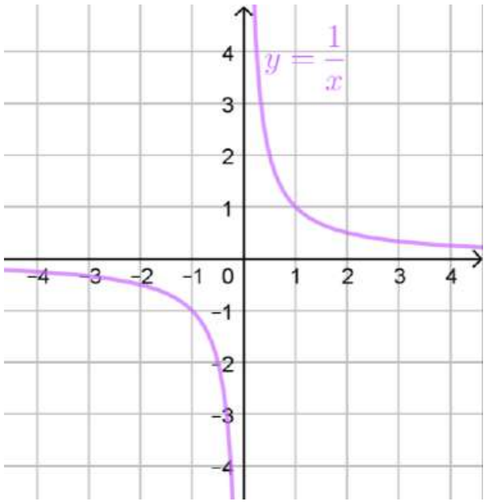
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3		$\nearrow$ 0 $\nearrow$	



Propriété 3 :
La **fonction inverse** définie sur $\mathbb{R}^*$ est :

- **strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$**
- **strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$



Démonstration :
Démontrons que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$:
Soient a et b deux réels de $]-\infty\,;0[$ tels que $a < b$.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$$

$a < b$ donc $b - a > 0$
$a < 0$ et $b < 0$ donc d'après la règle du signe d'un produit $ab > 0$
Donc d'après la règle du signe d'un quotient :

$$\frac{b-a}{ab} > 0 \ \ soit\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$$

On en déduit que : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

On a donc montré que pour tous réels a et b de l'intervalle $]-\infty\,;0[$ tels que $a < b$, on a $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

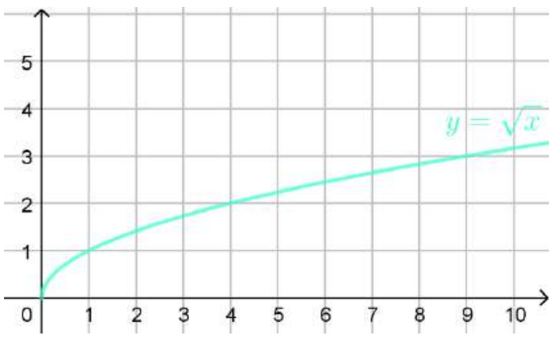
On montre de la même manière que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$..

Attention :
La fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
En effet,

$$-2 < 4 \ \ et\ \frac{1}{-2} < \frac{1}{4}$$

Propriété 4 :
La **fonction racine carrée** définie sur $[0\,;\ +\infty[$ est **strictement croissante sur $[0\,;\ +\infty[$.**

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$	



Démonstration :
Soient a et b deux réels de $[0\ ;\ +\infty[$ tels que $a < b$.
$a < b$ donc a et b ne peuvent pas être tous les deux nuls donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Or $a < b$ donc $a - b < 0$
De plus, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

Donc d'après la règle du signe d'un quotient :
$$\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0 \; soit \; \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$$

On en déduit que : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

On a donc montré que pour tous réels a et b de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ tels que $a < b$, on a $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.